20/11/2017

$$
\begin{array}{cccccc}
\frac{1}{4} & 1 & 1 & 1 & 1 \\
\frac{1}{2} & 2 & -1 & 1 & 4 \\
 & 4 & 1 & 1 & 4 \\
 & & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\
 & & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\
 & & & 1 & 1
\end{array}
$$

$$i = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \rightarrow i = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$i = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Γίνεται απαλοιφή Gauss στο σύστημα που προκύπτει μετά τις μεταθέσεις:

$$Ax = b \Leftrightarrow PAx = Pb$$

όπου ο P είναι μεταθετικός πίνακας.
Μεταθετικός πίνακας είναι ένας πίνακας που προκύπτει από μεταθέσεις των γραμμών του μοναδιαίου πίνακα.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

LU Ανάλυση με μερική οδήγηση

Γίνεται LU ανάλυση του πίνακα $A' = PA$

$$U = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ & & 1 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ \frac{1}{2} & 1 & \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Εύρεση αντιστρόφου (στο ίδιο παράδειγμα)

↳ Εύρεση αντιστρόφου του A' με LU ανάλυση:

$UX = Y$

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ \frac{1}{2} & 1 & \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Y^T = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$UX = Y$

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$X^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$$

$$A'^{(-1)} = X = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$A'^{(-1)} = (PA)^{-1} = A^{-1}P^{-1} = A^{-1}P^{T} \Leftrightarrow$$

$$A^{-1} = A^{-1}P^{T}P = A'^{-1}P$$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα:

Να βρεθεί ο αντίστροφος:

$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{3}$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$i = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \rightarrow i = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \rightarrow i = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ & \frac{4}{3} & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{matrix}$$

$$X^T = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = X = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & \\ \frac{1}{2} & 1 & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ & & \frac{4}{3} \end{bmatrix}.$$

$LY = I, \quad UX = Y, \quad A^{-1} = XP.$

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Νόρμες Διανύσματος

Έστω X γραμμικός χώρος στο $\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$). Μια απεικόνιση $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$, $x \to \|x\|$, λέγεται νόρμα αν ισχύουν:

i) $x \in X$: $\|x\| = 0 \iff x = 0$

ii) $x \in X$; $\lambda \in \mathbb{R}$: $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$

iii) $x, y \in X$: $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (τριγωνική)

$$0 = \|0\| = \|x-x\| \leq \|x\| + \|-x\| = 2\|x\| \Rightarrow \|x\| \geq 0$$

Προς τα κάτω τριγωνική ανισότητα.

$$\big| \|x\| - \|y\| \big| \leq \|x-y\|$$

$$\|x\| = \|x-y+y\| \leq \|x-y\| + \|y\| \Rightarrow \|x\| - \|y\| \leq \|x-y\|$$

ομοίως. $\|y\| - \|x\| \leq \|x-y\|$

Κυριότερες νόρμες στον $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$)

ℓ_1 : Νόρμα : $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$, $x \in \mathbb{R}^n$.

ℓ_2 : Νόρμα : $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{1/2}$ Ευκλείδεια νόρμα.

ℓ_∞ : Νόρμα : $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.

ℓ_p νόρμα : $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}$, $p \geq 1$.

Αποδεικνύεται ότι $\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \lim_{p\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} |x|^p\right)^{p}$

$= \|x\|_\infty$

Σαν άσκηση για το σπίτι να προσπαθήσω να το αποδείξω.

~o~o~o~o~o~o~o~o~o

Για τις ℓ_1, ℓ_∞ αποδ. ότι ισχύουν οι 3 ιδιότητ.
Για την ℓ_2, χρειάζεται να ορίζουμε το εσ. γινόμενο.
Ορίζουμε ως εσωτερικό γινόμενο $(\cdot,\cdot): \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

ως $(x,y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

$(\cdot,\cdot) : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C} \quad : (x,y) = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i y_i$

$(x,x) = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i \cdot x_i = \sum |x_i|^2 = \|x\|_2^2$.

Ανισότητα Cauchy-Schwartz:
$|(x,y)| \le \|x\|_2 \|y\|_2$.